Complexe Analyse 31-1-03

Toets

Notaties: $O \subset \mathbb{C}$ een open deelverzameling. $D(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| < r\}$ de open schijf met centrum $\alpha \in \mathbb{C}$ en straal $r > 0$.

1. a. Schrijf $\frac{3+2i}{1-2i}$ in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

b. Schrijf $(1+i)^5$ in polaire vorm.

2. a. Geef de definities van holomorfe en analytische functies $f : O \longrightarrow \mathbb{C}$, en geef het verband tussen deze beide begrippen.

b. Geef de definities van e^z, $\cos(z)$ en $\sin(z)$, en geef aan waarom dit holomorfe functies zijn.

3. a. Zij $f = u + iv$, met u en v reële functies. Neem aan dat f holomorf is. Geef de Cauchy-Riemannvergelijkingen voor u en v.

b. Zij f een holomorfe functie, gedefinieerd op de samenhangende open verzameling O, met Re (f) constant. Toon aan dat f constant is.

4. a. Zij $\Gamma \subset O$ een kromme met continu differentieerbare parametrisering $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Gamma$. Zij $f : O \longrightarrow \mathbb{C}$ een continue functie. Hoe definieert men de integraal $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz$?

b. Zij $\Gamma_z = [0, z] = \{tz : 0 \leq t \leq 1\}$ het lijnsegment tussen 0 en z. Bepaal $F(z) = \int_0^z \cos(u)du = \int_{\Gamma_z} \cos(u)du$.

5. a. Formuleer de stelling van Cauchy over holomorfe functies f gedefinieerd op $\mathbb{C}$ of op $D(\alpha, r)$.

b. Zij C de positief (anti-klok) gerichte cirkel met centrum 1 en straal 2. Bepaal de integraal $\displaystyle\int_C \sin(z)dz$.

6. a. Zij $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ een holomorfe functie. Geef de formule van Cauchy betreffende f.

b. Zij C de positief (anti-klok) gerichte cirkel met centrum 0 en straal 2. Bepaal de integraal $\displaystyle\int_C \frac{\cos(z)}{z+1}dz$.

7. a. Zij $f : O \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorf. Zij $z_0 \in O$. Wat kan men zeggen over de convergentiestraal van de machtreeks $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$?

b. Beschouw de functie gedefinieerd voor $z \neq 1$ door $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{1-z}$. Wat is de convergentiestraal van de Taylorreeks $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ van deze functie ? Bepaal a_0, a_1, a_2, a_3.

8. a. Geef het principe van eenduidige analytische voortzetting.

b. Karakteriseer met behulp hiervan de holomorfe functies uit vraag 2 b.

9. a. Formuleer de stelling van Liouville over geheel analytische functies $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

b. Geef een voorbeeld van een toepassing van deze stelling.